МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева»  
(Самарский университет)   
  
  
Факультет информатики  
Кафедра программных систем  
  
Дисциплина  
**Вычислительные методы  
  
  
  
ОТЧЕТ**по лабораторной работе №5

«Приближение рядами Фурье»  
Вариант №9

Студент: Колбанов Д.О.,   
Группа: 6301-020302D  
  
Преподаватель: Заболотнов Ю.М.  
  
Оценка: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  
  
Дата: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Самара 2023

**Исходная функция**

**Задание**

Последовательность выполнения работы состоит из следующих шагов:

1. вычислить массив значений опорной функции , соответствующей индивидуальному заданию, с добавлением случайной величины, распределенной по равномерному закону, на некотором интервале ;
2. произвести аппроксимацию заданного массива рядом Фурье с помощью МНК с использованием стандартных средств математического пакета Mathcad;
3. исследовать зависимость погрешности аппроксимации от количества гармоник, выбрав это количество из условия минимальной погрешности. Контроль погрешности осуществляется путем сравнения графиков исходной функции и ряда Фурье;
4. произвести аппроксимацию заданной непериодической ступенчатой функции рядом Фурье, применяя программные средства пакета Mathcad. Исследовать зависимость величины наблюдаемого краевого эффекта от количества учтенных гармоник.

**Постановка задачи**

Функции и , где , называются ортогональными на множестве значений , если , (1)

Причем узлы не являются корнями функций и, поэтому при имеем .

Если функции и ортогональны на множестве, то СЛАУ метода наименьших квадратов, записанная в матричной форме , где (2)

, ,

имеет диагональную матрицу и, следовательно, простое аналитическое решение: , где – коэффициенты Фурье (3)

Система интегрируемых функций , называется ортогональной с весом W(x) на отрезке [a, b], если , при j k. (4)

Причем, если функции , не обращаются в ноль на отрезке [a, b] тождественно, то при j = k имеем

Для ортогональных функций решения СЛАУ записываются в виде , где . (5)

При интегральном МНК приближение функций рассматривают не на множестве точек, а на отрезке, то есть ставится задача о замене одной функции на другую, более простую при

Тогда коэффициенты обобщённого полинома P(x) вычисляются исходя из минимума интеграла: , где – весовая функция

Минимизация интеграла:

Система тригонометрических функций , где , ортогональна с весом на любом отрезке , в частности, на отрезке

Система интегрируемых функций , называется ортогональной с весом на отрезке , если , при (6)

Причем, если функции , не обращаются в ноль на отрезке тождественно, то при имеем

Для ортогональных функций решения СЛАУ записываются в виде , где (7)

Тригонометрический полином записывается в виде , где . (8)

Для системы тригонометрических функций справедливы соотношения .

Из формул (7) получаем следующие выражения для определения коэффициентов Фурье для тригонометрического полинома (8): , где , (9) , где . (10)

Вычисление коэффициентов Фурье по формулам (9)-(10) для функции называется прямым преобразованием Фурье функции .

Вычисление ряда Фурье (8) по значениям коэффициентов называется обратным преобразованием Фурье функции .

Функция называется периодической с периодом , если существует такое число при

Для периодической функции ряд Фурье сходится к функции и можно положить , тогда , (11)

Слагаемые одного порядка в ряде (11) называются гармониками ряда Фурье.

Если функция не периодична, но обладает заданными свойствами, то погрешность аппроксимации рядом Фурье можно сделать сколь угодно малой, взяв надлежащее количество слагаемых, однако в этом случае погрешность вблизи концов интервала существенно больше, чем вдали от них (так называемый краевой эффект).

**Теорема Жордана**

Если функция имеет ограниченную вариацию (приращение) на отрезке , то ее ряд Фурье сходится для всех , причем в точках непрерывности сходится к , а точках разрыва – к значению .

Если ряд Фурье сходится, то имеет вид:



Применим формулы Эйлера для тригонометрических функций: ,, где - мнимая единица

При подстановке в (9) получим: .

Вещественные и комплексные коэффициенты Фурье связаны формулами ,, ,, где

В Mathcad Для получения массива комплексных коэффициентов Фурье (прямого преобразования) используется функция A:= fft(yi), где – задание функции с равномерной случайной величиной.

Для обратного преобразования используется функция f :=ifft(g), g:= if(j<= k, Aj ,0),где k – количество учитываемых гармоник.

**Программа**

Результаты расчетов представлены на рисунках 1–8.

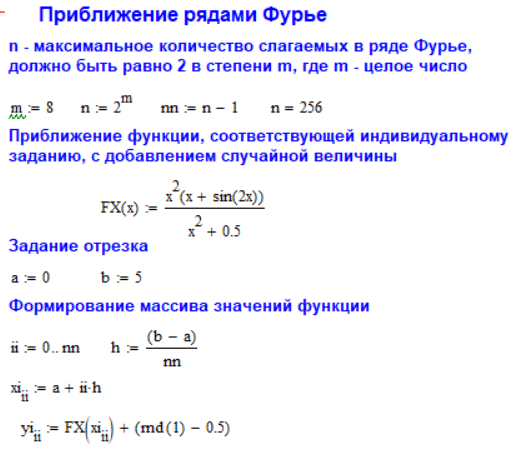


Рисунок 1 - Ввод исходных данных

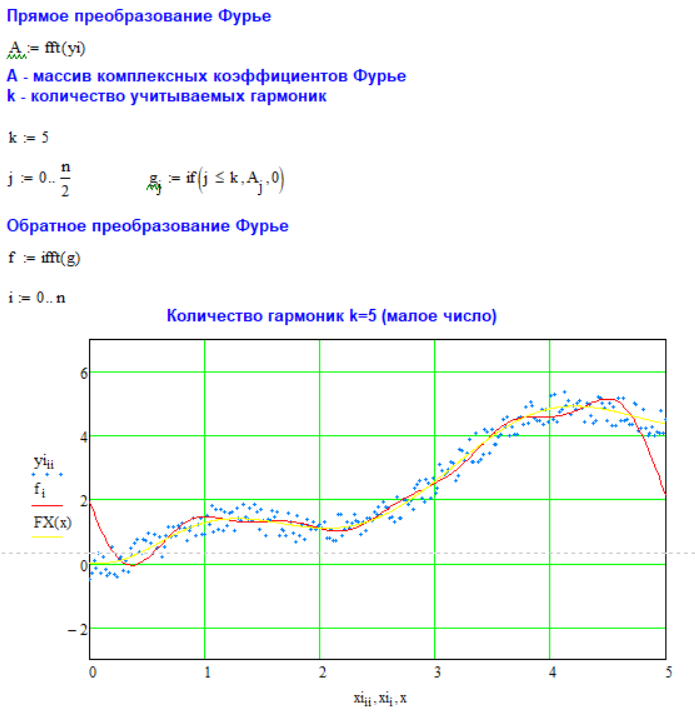


Рисунок 2 - Аппроксимация рядом Фурье при количестве гармоник k = 5

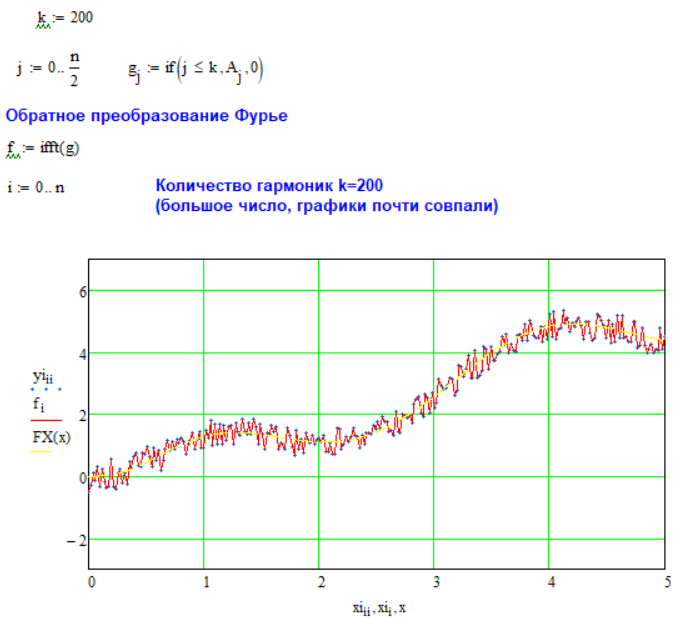


Рисунок 3 - Аппроксимация рядом Фурье при количестве гармоник k = 200

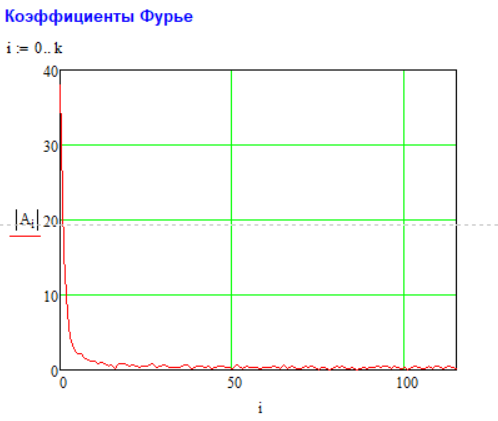


Рисунок 4 - Коэффициенты Фурье

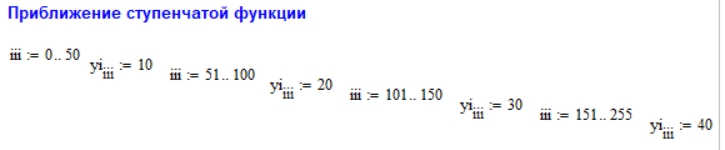


Рисунок 5 - Задание значений ступенчатой функции



Рисунок 6 - Аппроксимация рядом Фурье при количестве гармоник k = 15



Рисунок 7 - Аппроксимация рядом Фурье при количестве гармоник k = 100

**Выводы**

В ходе выполнения работы были сделаны следующие выводы:

* В случае периодической функции с повышением количества гармоник снижается погрешность аппроксимации;
* В случае непериодической ступенчатой функции наблюдается краевой эффект. Он уменьшается с увеличением числа учитываемых гармоник;
* Приближение рядами Фурье и интерполяция различаются способом представления функции: приближение рядами Фурье основано на разложении функции в бесконечную сумму синусов и косинусов. Метод интерполяции, с другой стороны, стремится найти аналитическую функцию, которая точно проходит через заданные узлы данных;
* С увеличением числа определяемых коэффициентов (высокой степени полинома n) весомо возрастает громоздкость метода наименьших квадратов (увеличивается порядок СЛАУ). Поэтому при достаточно большом количестве коэффициентов используется приближение рядами Фурье;
* При больших k ряды ведут себя как интерполяционные (на рисунке 3 представлен график, полученный обратным преобразованием Фурье для k = 200. Он прошёл через все табличные точки). При малых k – как метод МНК (на рисунке 2 представлен график, полученный обратным преобразованием Фурье для k = 5. Он близок к изначально заданной функции).